

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Трећи разред – А категорија

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy).$$

2. Нека је I центар кружнице уписане у $\triangle ABC$, $AB < AC$. Права AI поново сече његову описану кружницу у тачки D . Кружница описана око $\triangle CDI$ поново сече праву BI у тачки K . Доказати: $BK = CK$.
3. Дат је троугао чије су дужине страница природни бројеви и чија је површина природан број. Једна од његових страница је аритметичка средина друге две, а збир најкраће странице и површине је једнак збиру преостале две странице. Наћи дужине његових страница и његову површину.
4. Дата је табла $(2n + 1) \times (2n + 1)$ у чијем се ћошку налази паук. Паук у једном потезу може да се помери једно или два поља вертикално или дијагонално, или једно поље хоризонтално. Колико најмање потеза је потребно пауку да обиђе сва поља на табли? (Сматрамо да поље на ком паук стоји на почетку, као и поље на које стигне на крају, јесу поља која је обишао; такође, уколико паук одигра потез у ком се помери за два поља, сматрамо да паук јесте обишао и поље између њих.)
5. Примитивном Питагорином тројком називамо уређену тројку природних бројева (a, b, c) , узајамно простих по паровима, за које важи $a^2 + b^2 = c^2$.
- а) Доказати да се ниједна примитивна Питагорина тројка не може записати користећи само две различите цифре.
- б) Доказати да се бесконачно много примитивних Питагориних тројки може записати помоћу цифара 0, 1 и 5.