

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Први разред – А категорија

1. За природан број n , нека је $f(n)$ број написан истим цифрама али обратним редоследом (тј. здесна налево) ако n није дељив са 10, а иначе дефинишемо $f(n) = 0$. (На пример, $f(123) = 321$ и $f(30) = 0$.)
 - а) Ако важи $n = 3f(n)$, доказати да је n дељив са 27.
 - б) Ако важи $n = 2f(n)$, доказати да је n дељив са 9.
2. Нека је тачка K средиште странице CD правоугаоника $ABCD$. Праве BK и AC су ортогоналне и секу се у тачки H , а тачка G је подножје нормале из D на AC . Доказати:
 - а) $\angle ACB = \angle DHA$;
 - б) $GH = \frac{1}{3}AC$.
3. Математичка комисија се састоји од $2n$ чланова, $n \geq 3$. Познато је да је сваки члан комисије у свађи с тачно једним другим чланом комисије (ова релација је симетрична). На колико начина је могуће поделити комисију у три одбора: један за састављање задатака, један за оцењивање задатака и један за организацију такмичења, тако да сваки одбор има бар два члана и да никоја два члана комисије која су у свађи не буду у истом одбору?
4. Сат има три казаљке које се све окрећу равномерном брзином. Секундна казаљка направи круг за један минут, минутна за један сат, а сатна за 12 сати. У поноћ су све казаљке у истој позицији. Колико ће пута у периоду од 24 часа од тада једна казаљка са сваком од друге две заклапати угао од 30° ?
5. Барон Минхаузен живи у земљи Z у којој постоји 2018 градова и неки градови су повезани путевима (путевима је могуће кретати се у оба смера). Барон је установио да постоји град A из ког можемо кренути на путовање, на крају тог путовања се вратити у град A , а да током путовања прођемо свим путевима у тој земљи тачно једном. Он тврди да из те чињенице следи да за било која два пута p и r која иду из истог града постоји путовање из неког града B на крају ког се враћамо у град B , током путовања пролазимо свим путевима тачно једном, и притом путевима p и r пролазимо непосредно једним за другим. Да ли је он праву или по обичају лаже?

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.