

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Други разред – А категорија

1. Решити једначину:

$$\sqrt{17 - 7 \sin 2x} = 3 \cos x - 5 \sin x.$$

2. Дат је $\triangle ABC$ чије су странице a , b и c , $a \leq b \leq c$, а тежишне дужи које њима одговарају су t_a , t_b и t_c , респективно. Доказати:

а) једнакост $a^2 + c^2 = 2b^2$ важи ако и само ако важи $t_a^2 + t_c^2 = 2t_b^2$;

б) једнакост $a^2 + c^2 = 2b^2$ важи ако и само ако је $\triangle ABC$ сличан троуглу чије су странице дужина t_a , t_b и t_c .

3. Наћи све просте бројеве облика $1010101 \dots 0101$ (тј. чији децимални запис се састоји од цифре 1 иза које следи блок „01“ поновљен произвољан број пута).

4. Наћи сва ненегативна реална решења $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ система једначина

$$x_{i+1} = x_i^2 - (x_{i-1} - 1)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(Индексе узимамо циклично по модулу n .)

5. Дат је непаран природан број n . Квадрат странице n је подељен на n^2 јединичних квадрата. Странице ових квадрата одређују укупно $2n(n+1)$ јединичних дужи. Неке од ових дужи су обојене црвено, при чему сваки јединични квадрат има бар две црвене странице. Колико најмање дужи може бити обојено?