Државно такмичење из математике

осми разред:

2017.

1. Реши систем једначина

$$\frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{6}; \qquad \frac{y+z}{xyz}=\frac{4}{15}; \qquad \frac{z+x}{xyz}=\frac{7}{30}.$$

2. Нека је $ABCS$ правилна тространа пирамида, са основом ABC, код које су бочне ивице двапут дуже од ивице основе и нека је E тачка бочне ивице BS. Нагибни угао равни ACE према основи једнак је половини нагибног угла бочне стране према основи. Одреди однос у којем раван ACE дели запремину пирамиде.

3. Нека је N најмањи природан број који има тачно 2017 делилаца у скупу природних бројева. Докажи да N има бар 605 цифара.

4. На страници AB квадрата $ABCD$ је тачка E, а на страници CD тачка F, тако да је $AE : EB = 1 : 2$ и $CF : FD = 1 : 1$. Нека дужи BF и DE секу дијагоналу AC у тачкама N и M, редом. Докажи да су троуглови AME и CFN слични.

5. На 2018 картица исписани су цели бројеви од 0 до 2017. Затим су картице постављене на сто у један ред у произвољном поретку. Играчи A и B наизменично узимају по једну картицу, али при том могу да узму само једну од две крајње картице. Игру почиње играч A. Игра се завршава кад су све картице узете, а победник је играч код кога је збир бројева на узетим картицама већи. Докажи да један од играча има победничку стратегију. Који?