Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. За уочену тачку O унутар њега, нека је p_O права кроз O паралелна са AB, и нека су P_O и Q_O тачке пресека праве p_O са страницама AD и BC, редом; слично, нека је q_O права кроз O паралелна са CD, и нека су R_O и S_O тачке пресека праве q_O са страницама AD и BC, редом. Доказати да су следећи услови еквивалентни:

- постоји тачка $O \in \operatorname{int} ABCD$ за коју важи $P_O O \cdot O Q_O = R_O O \cdot O S_O$;
- за сваку тачку $O \in \operatorname{int} ABCD$ важи $P_O O \cdot O Q_O = R_O O \cdot O S_O$.

(Са $\operatorname{int} ABCD$ означавамо унутрашњост четвороугла $ABCD$.)

2. Доказати да је за свако $n \in \mathbb{N}$ број

$$2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4}$$

сложен.

3. Дуле се креће по бесконачној шаховској табли (равни поплочаној квадратима) а пчела по бесконачном саћу (равни поплочаној правилним шестоугловима). Обоје крећу са унапред утврђеног почетног поља („поља“ су квадрати за Дулета, а шестоуглови за пчелу), у сваком кораку морају прећи на суседно поље (поља су суседна ако имају заједничку ивицу) и не смеју доћи на поље на ком су већ били. За ма који природан број n, доказати да пчела има више могућих путања од n корака него Дуле.

4. Нека су задати реални бројеви $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ такви да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$|x-b_1| + |x-b_2| + \cdots + |x-b_n| \leqslant |x-a_1| + |x-a_2| + \cdots + |x-a_n|.$$

Доказати:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

и, за свако k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_k.$$

5. На кружници k уочене су тачке A, B, C и D у том поретку. Праве AB и CD секу се у тачки E, а праве AD и BC у тачки F. Уочене су кружнице k_1 и k_2, с центрима у тачкама E и F, редом, нормалне на кружницу k. Доказати да су кружнице k_1 и k_2 међусобно нормалне.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.