

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Четврти разред – А категорија

1. За реалне бројеве $x, y \in [e^{-3}, e]$ доказати неједнакост

$$\left| \ln \frac{x^x}{y^y} \right| \leq 2|x - y|.$$

2. Ако је a паран број, доказати да

$$(a + 1)^{2017} \mid a^{(a+1)^{2016}} + 1.$$

3. На свакој од n позиција у сали за физичко стоји по један ученик. Са позиције P_1 може се *сигурно додати лопта* на позицију P_2 ако се у кругу са пречником P_1P_2 не налази ниједна од осталих позиција. Нека су Ивица и Марица двоје ученика у сали, и нека се лопта иницијално налази код Ивице. Доказати да, на којим се год они позицијама налазили, постоји низ сигурних додавања којим се може проследити лопта од Ивице до Марице.

4. Нека је \mathbb{R}^+ скуп свих позитивних реалних бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такве да важи

$$f(x + f(y) + f(f(z))) = yf(1 + f(f(y))(x + z)) \quad \text{за све } x, y, z \in \mathbb{R}^+.$$

5. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека је D пресек симетрале $\angle A$ и стране BC , а E пресек симетрале $\angle B$ и стране AC . Нека су D_0 и E_0 ортогоналне пројекције тачака D и E , редом, на страну AB . Означимо са A_1 тачку оносиметричну тачки A у односу на праву CE_0 , а са B_1 тачку оносиметричну тачки B у односу на праву CD_0 . Доказати да $\triangle AA_1C$ и $\triangle BB_1C$ немају заједничких тачака осим тачке C .

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.