

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Други разред – А категорија

1. На ливади се налазе 3 мравињака: A , B и C . Растојање између мравињака A и B износи 260 мм а између мравињака B и C износи 1200 мм, и притом важи $\angle ABC = 60^\circ$. Из мравињака A креће мрав a ка мравињаку B , идући праволинијски, крећући се брзином $1 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$. У истом тренутку из мравињака B креће мрав b ка мравињаку C , такође праволинијски, идући брзином $3 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$. У ком тренутку ће растојање између мрара a и b бити минимално?
2. Нека је T тежиште $\triangle ABC$, и нека је t произвољна права кроз T таква да су темена A и B с једне њене стране, а теме C с друге. Нека су тачке A_0 , B_0 и C_0 ортогоналне пројекције тачака A , B и C , редом, на праву t . Доказати:

$$AA_0 + BB_0 = CC_0.$$

3. Пчела се креће по бесконачном саћу (равни поплочаној правилним шестоугловима). Пчела полази са унапред утврђеног шестоугла, у сваком кораку мора прећи на суседан шестоугао (шестоуглови су суседни ако имају заједничку ивицу), и не сме доћи на шестоугао на ком је већ била. За било који природан број n , означимо са x_n број могућих путања од n корака. Доказати:

$$2 \cdot 3^n \leq x_n \leq 6 \cdot 5^{n-1}.$$

4. Решити систем једначина:

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 2017;$$

$$3\{x\}\{5x\} = 4\{2x\}\{6x\}.$$

(Са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број не већи од x , а са $\{x\}$ означавамо $x - \lfloor x \rfloor$.)

5. Одредити за које природне бројеве n постоје природни бројеви $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ такви да важи

$$x^2 = 2(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.