

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Први разред – А категорија

1. Нека су A , B и C коначни скупови за које важи

$$|A \Delta C| + |B \Delta C| = |A \Delta B|.$$

Доказати да тада важи

$$A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B.$$

(За скупове X и Y означили смо $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, што се назива *симетрична разлика* скупова X и Y .)

2. У врсту је поређано 2016 столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или плавом бојом на такав начин да број парова суседних столица које имају исту боју буде паран?

3. Дат је $\triangle ABC$. На страници AB су одабране тачке C_1 и C_2 такве да важи

$$AC_1 = \frac{2015}{3015} AB \text{ и } AC_2 = \frac{2015}{3014} AB,$$

на страници BC тачке A_1 и A_2 такве да важи

$$BA_1 = \frac{1007}{2015} BC \text{ и } BA_2 = \frac{1008}{2015} BC,$$

а на страници AC тачке B_1 и B_2 такве да важи

$$AB_1 = \frac{2015}{3031} AC \text{ и } AB_2 = \frac{2015}{3030} AC.$$

Права AA_1 сече праве B_1C_1 и B_2C_2 редом у тачкама M и N , а права AA_2 сече B_1C_1 и B_2C_2 редом у тачкама Q и P . Доказати да се тежиште $\triangle ABC$ налази унутар четвороугла $MNPQ$.

4. Одредити највећу могућу дужину растућег низа $a_1, a_2, a_3 \dots$ простих бројева, уз услов да разлика свака два узастопна члана тог низа износи 2 или 4.
5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао чије су све странице једнаке дужине. Ако се две дијагонале тог петоугла секу под углом од 60° , доказати да су две његове странице паралелне.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.