

# Државно такмичење из математике

## осми разред:

### 2016.

1. Одреди све природне бројеве  $n$  такве да је  $2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$  квадрат неког природног броја.
2. Одреди непознати број  $xyzt$  ако за његове цифре важе следеће једнакости:  
 $xt + zt = 18$ ,  $xz + tz = 8$ ,  $xz + xt = 14$ ,  $x \cdot y \cdot z \cdot t = 0$ .
3. Дата је коцка  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  чија је запремина  $1000\text{cm}^3$ . Нека су  $E, F, G, H, I, J$  редом средишта ивица  $BC, CD, DD_1, D_1 A_1, A_1 B_1, B_1 B$ . Докажи да тачке  $E, F, G, H, I, J$  припадају једној равни и израчунај површину и запремину пирамиде  $AEFGHIJ$ .
4. Перица и Јоца су ушли у учионицу и видели да је на табли написано

#### СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Они су се договорили да играју следећу игру. Наизменично ће брисати слова тог записа, при чему се једним потезом може избрисати само неколико истих слова (бар једно и не морају сва иста слова да се избришу). Победник је играч који избрише последње слово. Перица почиње први. Који играч има победничку стратегију?

5. Права  $p$  садржи ортоцентар  $H$  оштроуглог троугла  $ABC$  и сече његове странице  $AB$  и  $CA$ , при чему страницу  $CA$  у тачки  $P$ . Права  $q$  такође садржи тачку  $H$ , нормална је на  $p$  и сече странице  $AB$  и  $BC$ , при чему страницу  $BC$  у тачки  $Q$ . Права кроз  $A$  паралелна са  $q$  и права кроз  $B$  паралелна са  $p$  секу се у тачки  $R$ . Докажи да су тачке  $P, Q$  и  $R$  колинеарне.