

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Трећи разред – А категорија

1. Решити једначину

$$\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = q,$$

где су непознате природан број n и прости бројеви p_1, p_2, \dots, p_n и q .

2. За дате природне бројеве n и k , колико има неопадајућих низова дужине k чији су елементи из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ и чија свака два суседна елемента имају парну разлику?
3. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева x таквих да је број $n^x - x^n$ дељив са m .
4. Две кружнице полупречника r_1 и r_2 секу се у тачкама A и B , а једна њихова заједничка тангента их додирује у тачкама C и D . Нека је N тачка пресека правих AB и CD , при чему је B између A и N . Израчунати однос висина $\triangle NAC$ и $\triangle NAD$ спуштених из тачке N .
5. Одредити све комплексне бројеве z који задовољавају следеће две једнакости:

$$\begin{aligned} z^{2015} + z^{2014} + |z| &= 3; \\ 3z^{2015} - |z|^{2014} - z &= 1. \end{aligned}$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.