

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

12. децембар 2015.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су a и b природни бројеви, при чему важи $a > b$. Доказати неједнакост

$$a^3 + ab^2 + b^2 + b \geq 2a^2b + a^2.$$

2. Дат је $\triangle ABC_0$ и тачке D_0 и E на дужима AC_0 и AB , редом. За задате тачке C_n и D_n (где $n \in \mathbb{N}_0$) тачке C_{n+1} и D_{n+1} дефинишемо на следећи начин: D_{n+1} је пресек правих C_nE и BD_0 , а C_{n+1} је пресек правих AD_{n+1} и BC_0 . Означимо $x = \frac{AD_0}{D_0C_0}$ и $y = \frac{AE}{EB}$. Наћи $\frac{AD_{2015}}{D_{2015}C_{2015}}$ у функцији од x и y .

3. Колико има низова дужине 8 чији су елементи из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који немају две узастопне јединице?

4. Дата је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

Доказати да је функција f непарна.

5. Доказати да се за сваки природан број n може одабрати природан број m такав да важи $\varphi(m) = n!$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.