

# Државно такмичење из математике

## осми разред:

2015.

1. Докажи да је за било које целе бројеве  $a, b, c, d$  производ  $abcd(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2)$  дељив са 7.
2. Израчунај запремину тростране пирамиде која има пет ивица дужине  $a$  и једну ивицу дужине  $a\sqrt{2}$ .
3. Нека је  $M$  тачка на мањем луку  $BC$  кружнице описане око квадрата  $ABCD$  странице  $a$ . Нека је  $P$  пресек  $AM$  са  $BD$ ,  $Q$  пресек  $DM$  са  $AC$ . Израчунај површину четвороугла  $APQD$ .
4. Нека су  $a, b, c$  природни бројеви такви да је  $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$  рационалан број. Докажи да је  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$  цео број.
5. Нека је  $n$  паран број. Два играча играју игру тако што наизменично пишу на табли по један број из скупа  $\{6, 7, 8, 9\}$ , све док на табли не буде написано  $n$  бројева. У игри побеђује други играч ако је збир свих написаних бројева дељив са 9, а у супротном побеђује први играч. Који играч има победничку стратегију ако је: а)  $n = 12$ ; б)  $n = 14$ ?