

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

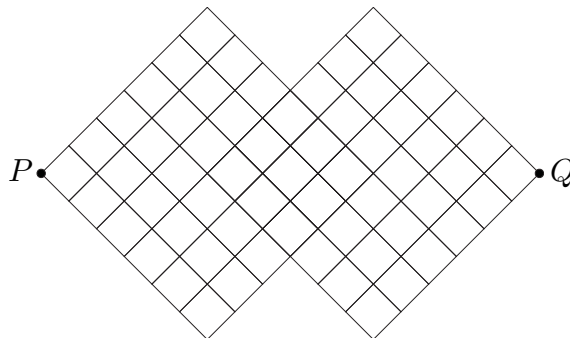
Трећи разред – А категорија

1. Нека је $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Функција $g : A \rightarrow A$ задата је на следећи начин:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{за } x < n; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Колико има функција $f : A \rightarrow A$ таквих да за све $x \in A$ важи $f(f(x)) = g(x)$?

2. У оштроугли $\triangle ABC$ уписани су квадрати $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$ и $P_3Q_3R_3S_3$ на следећи начин: тачке P_1 и Q_1 леже на дужи BC , тачка R_1 на CA и тачка S_1 на AB ; тачке P_2 и Q_2 леже на дужи CA , тачка R_2 на AB и тачка S_2 на BC ; тачке P_3 и Q_3 леже на дужи AB , тачка R_3 на BC и тачка S_3 на CA . Нека је M_1 средиште дужи P_1Q_1 , M_2 средиште дужи P_2Q_2 и M_3 средиште дужи P_3Q_3 . Доказати да се праве AM_1 , BM_2 и CM_3 секу у једној тачки.
3. Одредити највећи природан број који има особину да је дељив свим природним бројевима који нису већи од $\sqrt[3]{n}$.
4. Нека је дат троугао чије су дужине страница три узастопна природна броја и највећи угао је два пута већи од најмањег. Доказати да је такав троугао јединствен.
5. Колико има путева између тачака P и Q најкраће могуће дужине, при чему је дозвољено кретати се искључиво дуж страница квадратне мреже на цртежу?



Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.