Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Четврти разред – А категорија

1. Дат је природан број n. Нека су $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$ реални бројеви који задовољавају једнакости
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$
и
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1.$$
Одредити све могуће вредности броја x_1.

2. Наћи максималан производ природних бројева чији је збир једнак 2013.

3. У квадрат $ABCD$ уписана је кружница k. За сваку тачку T кружнице k, нека су α_T и β_T углови под којима се виде дијагонале AC и BD квадрата. Доказати да за свако $T \in k$ важи $\operatorname{tg}^2 \alpha_T + \operatorname{tg}^2 \beta_T = 8$.

4. Нека је a_0 произвољна цифра. За $n \in \mathbb{N}_0$, нека a_{n+1} представља цифру јединица броја $2^0 a_0 + 2^1 a_1 + \cdots + 2^n a_n$. Доказати да је низ $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ периодичан почев од неког члана.

5. Мерлин, помоћник краља Артура, установио је да постоји 2013 витезова округлог стола, и да притом сваки од њих има тачно два непријатеља међу осталим витезовима. Мерлин је даље утврдио да сви витезови могу сести за округли сто на такав начин да између свака два непријатеља седе тачно 182 друга витеза. Знајући да је могућ овакав распоред за округлим столом, одредити на колико начина може бити одабрана група витезова (групу чини бар 1 витез) у којој никоја два витеза нису у непријатељским односима.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.