Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Други разред – А категорија

1. Доказати да за све реалне бројеве α, β, γ важи неједнакост

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant 1.$$

2. Наћи све реалне бројеве a за које једначина

$$x^2 + y^2 = a(x+1)(y-1)$$

има решења у скупу реалних бројева.

3. Наћи све узајамно просте природне бројеве a и b такве да важи: ако се децималном запису броја a здесна допише зарез, а затим се напише децимални запис броја b, добија се децимални запис броја $\frac{b}{a}$.

4. Кружница k_1 са центром у O_1 и полупречником r и кружница k_2 са центром у O_2 и полупречником $2r$ додирују се изнутра. Тетива AB кружнице k_2 изабрана је тако да додирује кружницу k_1 у тачки T и да је $AT^2 + BT^2$ највећи могућ. Ако је $\sphericalangle ATO_2$ туп, одредити $\sphericalangle ATO_2$.

5. Нека су m и n природни бројеви. Табла димензије $n \times n$ обојена је на шаховски начин, тако да је поље у десном доњем углу бело. Аца и Бане играју следећу игру. У сваком потезу, Аца мења боју свим пољима једне врсте, а затим Бане мења боју свим пољима једне колоне (приликом промене боје, црна поља постају бела, а бела постају црна). Доказати да Бане може играти тако да после m одиграних потеза број црних поља на табли буде паран.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.