

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Први разред – А категорија

1. За реалне бројеве a, b, c важе неједнакости

$$|b - c| \geq |a|, |c - a| \geq |b|, |a - b| \geq |c|.$$

Доказати да је један од бројева a, b, c једнак збиру преостала два.

2. У троугао ABC са страницама $BC = a, CA = b$ и $AB = c$ уписан је круг. Једна тангента тог круга сече странице AC и BC у тачкама P и Q , редом. Одредити обим троугла PQC .

3. Наћи сва целобројна решења једначине

$$6(6a^2 + 3b^2 + c^2) = 5d^2.$$

4. Нека је $ABCD$ четвороугао такав да важи

$$\sphericalangle BCA + \sphericalangle CAD = 180^\circ \text{ и } AB = AD + BC.$$

Доказати да је $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD = \sphericalangle CDA$.

5. На одбојкашком турниру учествовало је 10 екипа. Свака од њих одиграла је по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. На крају турнира, прва екипа имала је x_1 победа и y_1 пораза, друга екипа x_2 победа и y_2 пораза, итд. Доказати да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$

(Одбојкашка утакмица се не може завршити нерешеним резултатом.)

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.