

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Трећи разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} &= y^2 \cdot \sqrt[3]{y^2}, \\y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} &= \sqrt[3]{x^2}.\end{aligned}$$

2. Нека су N и S дијаметрално супротне тачке кружнице \mathcal{C} и нека је t тангента кружнице \mathcal{C} у тачки S . Кружница k са центром у O сече кружницу \mathcal{C} у тачкама A и B и ортогонална је на њу. Праве NA , NB и NO секу праву t у тачкама A' , B' и O' , редом. Доказати да је тачка O' средиште дужи $A'B'$.
(Кружнице γ_1 и γ_2 су ортогоналне ако се секу у тачкама X и Y и при томе су њихове тангенте у тачки X међусобно нормалне.)

3. Наћи све природне бројеве x за које

$$x \mid [(x-1)\sqrt{x}].$$

(Са $[x]$ означен је цео део броја x .)

4. Унутар троугла ABC на симетрали угла ACB уочена је тачка M таква да је

$$\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAC = 30^\circ.$$

Доказати да је $\sphericalangle ACB \leq 60^\circ$.

5. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Одредити број различитих начина на који се табла димензије $2 \times n$ може поплочати доминама (правоугаоникима димензије 1×2 и 2×1) и квадратима димензије 2×2 .
(У поплочавању табле свако поље прекривено је тачно једном домином или квадратом.)

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.