

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Четврти разред – А категорија

1. Тело T запремине $\alpha \in (0,1)$ садржано је у јединичној коцки I . Доказати да постоје коцке K_1 и K_2 за које важи:
 - 1° $K_1, K_2 \subseteq I$;
 - 2° K_1 и K_2 немају заједничких унутрашњих тачака;
 - 3° збир дужине ивице коцке K_1 и дужине ивице коцке K_2 једнак је 1;
 - 4° запремина дела тела T који се налази у K_1 једнака је запремини дела тела T који се налази у K_2 .
2. Кошаркаш гађа кош четири пута. Вероватноћа поготка приликом сваког гађања је $1/2$, осим уколико кошаркаш промаши оба пута у прва два бацања, када је вероватноћа поготка у сваком наредном покушају $2/3$.
 - а) Одредити расподелу вероватноћа броја погодака у четири бацања.
 - б) Колика је вероватноћа да је кошаркаш погодио у трећем покушају ако се зна да је имао тачно три поготка?
3. Наћи све парове различитих простих бројева p и q за које је
$$5pq - 1$$
пети степен целог броја.
4. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао за који важи $AD = AB$ и нека је X тачка на страници CD таква да је $\sphericalangle XAD = \sphericalangle ADB$. Доказати да је
$$AX^2 - XD^2 = BC \cdot XD.$$
5. Једнакокраки траpez чије су основице дужина 1 и 5, а крак дужине $\sqrt{7}$, прекривен је са 10 подударних кругова полупречника r . Доказати да је $r \geq \frac{1}{2}$.

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.