

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Други разред – А категорија

1. На страницама AC и AB једнакостраничног троугла ABC дате су тачке M и N , редом, тако да је $MC : MA = NA : NB = 2 : 1$. Ако је тачка P пресек дужи BM и CN , доказати да је $\sphericalangle APC = 90^\circ$.

2. Да ли постоји број $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такав да су скупови

$$\{(z - i)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{и} \quad \{(z + i)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

коначни?

3. Нека је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задата са $f(x) = x^2 + (a + 1)x + 1$. Одредити све вредности реалног параметра a такве да за све реалне бројеве x важи

$$\left| \frac{f(x)}{x^2 + x + 1} \right| < 3.$$

4. Дат је троугао ABC . Нека је $2r < \min\{AB, BC, CA\}$ и k_A, k_B, k_C кружнице са центрима A, B, C , редом, и полупречником r . На колико различитих начина можемо одабрати тачке $A_1 \in k_A, B_1 \in k_B$ и $C_1 \in k_C$ тако да је троугао $A_1B_1C_1$ сличан, али не и подударан, са троуглом ABC ?
(Са $\min\{a, b, c\}$ означен је најмањи од реалних бројева a, b, c .)

5. Шаховска фигура, коју зовемо *слон*, у једном потезу помера се за једно поље лево, или за једно поље горе, или за једно или два поља укосо горе лево (под углом од 135°). Слон се налази на доњем десном пољу шаховске табле димензије 8×7 . Два играча наизменично померају слона, а губи онај играч који први не може да одигра потез. Који играч има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.