

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су $z_1, z_2, \dots, z_{2011}$ комплексни бројеви модула 1 чији је збир једнак 0, а z произвољан комплексан број. У функцији од z израчунати збир

$$\sum_{k=1}^{2011} |z - z_k|^2.$$

2. Колико највише реалних нула може имати полином

$$P(x) = (ax^3 + bx + c)(bx^3 + cx + a)(cx^3 + ax + b),$$

где је $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

(Свака нула рачуна се онолико пута колика је њена вишеструкост.)

3. Нека су $S(n)$ и $P(n)$, редом, збир и производ цифара природног броја n (у декадном запису). За $k \in \mathbb{N}$, одредити број решења једначине

$$\frac{P(n)}{S(n)} = k.$$

4. Дат је троугао ABC и тачка M која не лежи ни на једној од три праве које садрже висине тог троугла. Права кроз M нормална на AM сече праву BC у тачки A_1 . Тачке B_1 и C_1 дефинишу се аналогно. Доказати да су A_1, B_1, C_1 колинеарне тачке.

5. Колико се највише подскупова скупа $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ може избрати, тако да је унија свака два једнака скупу N_n ?

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.