

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Четврти разред – А категорија

1. Колико нула има функција

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n},$$

где су $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ произвољни реални бројеви?

2. Одредити све природне бројеве n за које важи једнакост

$$3^n + 4^n + \dots + (n + 2)^n = (n + 3)^n.$$

3. Одредити (или доказати да не постоји) највећи природан број n за који постоји цео број a такав да свака два међу бројевима a, a^2, a^3, \dots, a^n дају различите остатке при дељењу са 2013.

4. У троуглу ABC тачке S и S_a су центри редом уписаног и споља приписаног круга наспрам A , E је тачка пресека симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC , а N је средиште лука BC описане кружнице $\triangle ABC$ који не садржи A . Доказати да важи

$$AS \cdot AS_a = AE \cdot AN.$$

5. За $n \in \mathbb{N}$ нека је $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Са L_n означен је број подскупова скупа N_n (укључујући и празан скуп) који не садрже два узастопна природна броја, као ни 1 и n истовремено. Са M_n означен је број подскупова скупа N_n (укључујући и празан скуп) који не садрже два узастопна природна броја. Одредити све природне бројеве $m > 3$ за које важи

$$L_m > M_{m-3} + M_{m-1}.$$

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.