

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}x^2 + 3xy &= 54 \\ xy + 4y^2 &= 115.\end{aligned}$$

2. Нека су a, b, c реални бројеви такви да важи

$$\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = 1.$$

Доказати да је $|abc| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Када важи знак једнакости?

3. Ако ниједан од углова $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ конвексног четвороугла $ABCD$ није прав, доказати да важи

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \delta} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \delta.$$

4. Тачка S је центар уписаног круга троугла ABC , а D средиште странице AB . Ако је $\angle ASD = 90^\circ$, доказати да је $AB + BC = 3AC$.
5. На столу се налазе две гомиле жетона, једна од m , друга од n жетона. Два играча играју наизменично, а у сваком потезу дозвољено је једну гомилу поделити на произвољно много мањих (у којима не мора бити једнак број жетона). Губи играч који не може да повуче потез, јер је на свакој гомили остао по један жетон. Који од играча има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.