

**ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.**

**Трећи разред, А категорија**

1. Одредити све  $a \in \mathbb{R}$  за које корени  $x_1, x_2, x_3$  полинома  $x^3 - 4x^2 - ax + a$  задовољавају једнакост

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 0.$$

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$2 \cdot \log_3(\operatorname{ctg} x) = \log_2(\cos x).$$

3. Нека је  $\varphi(n)$  вредност Ојлерове функције броја  $n$ . Доказати да постоји бесконачно много природних бројева  $n$  за које је  $\varphi(n) = \frac{n}{3}$ .
4. Конвексан шестоугао је уписан у кружницу  $k$ . Његове узастопне стране су дужине 2, 2, 7, 7, 11 и 11. Одредити полупречник кружнице  $k$ .
5. За свако  $n \in \mathbb{N}$  одредити најмањи природан број  $m$  такав да у сваком  $m$ -елементном подскупу скупа  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  постоје два узајамно проста броја.

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.