

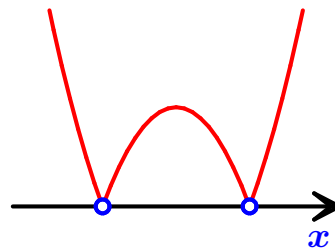
**ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.**

Четврти разред, А категорија

1. Дата је диференцијабилна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ за коју важи $|f'(x)| < 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Доказати да једначина $f(x) = x$ има јединствено решење у \mathbb{R} .
2. Да ли постоји природан број n и реални бројеви a_0, a_1, \dots, a_n тако да је на слици приказан график функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за коју је

$$f(x) = |a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0| - |a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n|,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$?



3. Нека је $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ бијекција таква да за све $m, n \in \mathbb{N}$ из $m < n$ следи

$$m + f(m) < n + f(n).$$

Одредити $f(2012)$.

4. Нека је AM пречник кружнице описане око троугла ABC и нека тај пречник сече страницу BC у тачки D . Ако су E и F подножја нормала из тачке D на странице AB и AC , редом, доказати да је $EF \parallel BC$.
5. Природан број зовемо *зао* ако се у његовом бинарном запису налази паран број јединица. На пример, број $18 = (10010)_2$ је зао. Одредити суму првих 2012 злих бројева.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.