

**ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.**

**Трећи разред, А категорија**

1. На табли су написани бројеви  $1, 2, \dots, 30$ . Онда су избрисана два броја и написана је њихова разлика (од већег је одузет мањи број). Овај поступак је понављан све док на табли није остао само један број. Одредити парност овог броја.

2. Нека су  $ABC$  и  $A'B'C'$  троуглови такви да је  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' = 60^\circ$ . Доказати да је

$$2 \cdot BC \cdot B'C' \geq AB \cdot A'B' + CA \cdot C'A'.$$

3. На табли је записан полином  $x^2 + 2010x + 2011$ . У сваком кораку полином  $f(x)$  који је записан на табли можемо заменити полиномом

$$x^2 \cdot f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ или } (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Да ли после коначно много корака на табли може бити записан полином  $x^2 + 2011x + 2010$ ?

4. Четвороугао  $ABCD$  је уписан у круг. На луку  $CD$ , који не садржи тачке  $A$  и  $B$ , налази се произвољна тачка  $M$ . Нека дужи  $MA$  и  $MB$  секу страну  $CD$  у тачкама  $X$  и  $Y$ , редом. Доказати да однос

$$\frac{DX \cdot CY}{XY}$$

не зависи од положаја тачке  $M$ .

5. Дат је низ бројева

$$mp + 1, mp^3 + 1, mp^5 + 1, \dots$$

где је  $p$  прост, а  $m$  природан број.

(а) Доказати да се у овом низу налази највише један потпун квадрат.

(б) Да ли се у овом низу мора налазити потпун квадрат?

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.