

**ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.**

Четврти разред, Б категорија

1. Ако је $y = \frac{(x-1)e^x}{x}$, доказати да је функција

$$xy' + y - xe^x$$

на интервалима на којима је дефинисана константна.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\cos^3 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin^3 x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) > \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3. Одредити све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$\begin{aligned}2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\3x + 2y + 3z + 2t &= 0 \\2x + 2y + 3z + 3t &= 0 \\3x + 3y + 2z + mt &= 0\end{aligned}$$

има бесконачно много решења у скупу реалних бројева.

4. На колико начина је могуће распоредити 11 птица у 3 идентична кавеза, тако да сваки кавез садржи бар три птице?
5. Нека су ABC и $A'B'C'$ троуглови такви да је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' = 60^\circ$. Доказати да је

$$2 \cdot BC \cdot B'C' \geq AB \cdot A'B' + CA \cdot C'A'.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.