# ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

## Четврти разред, А категорија

**1.** Доказати да је функција

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} + 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

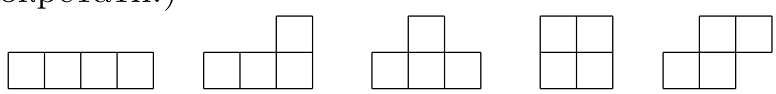
на интервалима у којима је дефинисана константна, а затим наћи вредност ове функције.

**2.** На страницама $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$, правоугаоника $ABCD$, одабране су редом тачке $E$, $F$, $G$ и $H$, тако да је четвороугао $EFGH$ ромб. Ако је $AB = 2$ и $BC = 1$, доказати да је

$$1 \leqslant P < \frac{5}{4},$$

где је $P$ површина ромба $EFGH$.

**3**. Тетрамино комплет садржи 5 фигурица приказаних на слици (свака тетрамино фигурица има површину 4). Одредити површину највећег квадрата који је могуће поплочати без преклапања, уколико поседујемо 5 тетрамино комплета.
(Није нужно користити свих 25 тетрамино фигурица. Фигурице се могу ротирати и окретати.)



**4.** Наћи све природне бројеве $a$ и $b$ за које $ab+1$ дели бројеве $a^3 + 3ab^2 + 2$ и $3b^4 - 2b^3 + 3$.

**5.** У троуглу $ABC$ са $R$ и $r$ означени су, редом, полупречник описаног и уписаног круга, а са $l_a$, $l_b$ и $l_c$ дужине одсечака симетрала унутрашњих углова. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r}{R}}\,.$$

Испитати када се достиже једнакост.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.