

**ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.**

**Трећи разред, Б категорија**

1. Одредити све вредности реалног параметра  $m$  за које систем једначина

$$\begin{aligned}2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\3x + 2y + 3z + 2t &= 0 \\2x + 2y + 3z + 3t &= 0 \\3x + 3y + 2z + mt &= 0\end{aligned}$$

има бесконачно много решења у скупу реалних бројева.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

3. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x > 2.$$

4. Око лопте је описана права зарубљена кружна купа. Доказати да је однос запремине лопте и запремине купе једнак односу површине лопте и површине купе.
5. Сваки члан породице Топаловић или увек говори истину или увек лаже. Аксентије, Милутин и Лаки (Милутин је Аксентијев син, а Лаки Милутинов) су дали по једну изјаву везану за њих тројицу:

$p$ : Оба оца или увек говоре истину или оба оца увек лажу.

$q$ : Један син увек лаже, а други син увек говори истину.

$r$ : Изјаве  $p$  и  $q$  нису обе лажне.

(а) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити да ли говори истину или лаже?

(б) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити коју је изјаву (од  $p, q, r$ ) дао?

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.