ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Други разред, А категорија

1. Нека је $m \in \mathbb{R}$ такав да једначина $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ има реалне и различите корене. Доказати да је тачно један корен те једначине у интервалу $(-2, 3)$.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, а M средиште странице BC. Права која садржи тачку H и нормална је на праву HM сече праве AB и AC у E и F, редом. Доказати да је $HE = HF$.

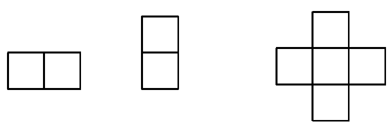
3. Одредити природан број n чији је кубни корен једнак броју који се из n добија брисањем његове последње три цифре у декадном запису.

4. Доказати да постоји бесконачно много уређених парова $(x, y) \in (0, \pi)^2$, тако да је скуп

$$\left\{\sin^2 x + \sin^2 y, \sin^2(x+y), 1\right\}$$

двоелементан, а скуп $\{\sin nx + \sin ny \mid n \in \mathbb{N}\}$ коначан.

5. Да ли се табла 8×8, из које је исечено доње-лево и горње-десно поље, може поплочати фигурама облика:



?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.