

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_{\sqrt{x}} \log_2 (4^x - 12) \leq 2.$$

2. Одредити највећи заједнички делилац бројева $1 + 2010!$ и $1 + (2010!)!$.

3. Нека је D средиште лука \widehat{BC} описане кружнице $\triangle ABC$ који не садржи тачку A , а M тачка полигоналне линије $B - A - C$ најближа тачки D . Ако је $AC > AB$, доказати да је $CM = \frac{AC - AB}{2}$.

4. Нека је S скуп тачака (x, y) у координатној равни чије су координате цели бројеви који задовољавају $0 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 4$ и нека је одабрана 21 тачка из S . Доказати да постоји правоугаоник чија су темена међу одабраним тачкама, а странице паралелне координатним осама.

5. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle BCSA > 90^\circ$ и $\sphericalangle CAB < \sphericalangle ABC$. Тангента на описану кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P . Нека је M тачка на k , таква да је $PM = PC$ (различита од тачке C), N пресек правих CM и AB , а D пресек описане кружнице $\triangle AMN$ и праве AP (различит од A). Доказати да је $CD \parallel AB$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.