

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да за $x > 0$ важи неједнакост

$$1 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{x^3}{16} < (1 + x)^{\frac{3}{2}} < 1 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2.$$

2. На таблу 8×8 поставити највећи могући број топова, тако да сваки од њих туче тачно једног од преосталих топова.
3. У оштроуглом $\triangle ABC$ је $BC > CA$. Нека је O центар описане кружнице, а H ортоцентар овог троугла и F подножје нормале из C на AB . Нормала на OF у F сече AC у P . Доказати да је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle CAB$.
4. Одредити све просте бројеве p , такве да $p^{2010} \mid 2010^{p^{2010}} + 1$.
5. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle BSA > 90^\circ$ и $\sphericalangle CAB < \sphericalangle ABC$. Тангента на описану кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P . Нека је M тачка на k , таква да је $PM = PC$ (различита од тачке C), N пресек правих CM и AB , а D пресек описане кружнице $\triangle AMN$ и праве AP (различит од A). Доказати да је $CD \parallel AB$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.