

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rccccrcl} x & + & y & + & az & = & 1 - a, \\ ax & - & y & + & z & = & -1, \\ x & - & ay & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. У лопту је уписана правилна тространа пирамида са правим ивичним угловима при врху. Одредити однос дужина висине пирамиде и полупречника лопте.

3. Нека је $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ако је

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x + \varphi)}{b} = \frac{\cos(x + 2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x + 3\varphi)}{d},$$

доказати да је $\frac{a + c}{b} = \frac{b + d}{c}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Колико решења има скуповна једначина

$$X \cup Y = \{1, 2, \dots, n\}?$$

5. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_{\sqrt{x}} \log_2 (4^x - 12) \leq 2.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.