

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Други разред, Б категорија

1. Да ли постоји реалан број a за који једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење?
2. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, који су конјуговани свом квадрату.
3. Нека су a, b, c странице, а s полубим троугла ABC . Нека су t_a, t_b, t_c тежишне дужи које одговарају страницама a, b, c , редом. Доказати да је

$$\frac{3}{2} \cdot s < t_a + t_b + t_c < 2s.$$

4. Нека је је $X = \{f_a(x) = x^2 + ax - 2a - 5 \mid a \in \mathbb{R}\}$ (скуп парабола).
 - (а) Доказати да све параболе из X секу x -осу.
 - (б) Одредити једначину геометријског места темена свих ових парабола.
 - (в) За коју вредност параметра a је збир квадрата корена једначине $f_a(x) = 0$ најмањи?
5. На такмичењу је учествовало 100 ученика, који су решавали по пет задатака. Познато је да је сваки задатак решило бар 60 ученика. Доказати да постоје два ученика који су заједно решили све задатке.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.