

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Други разред, А категорија

1. Одредити све $a, b \in \mathbb{R}$ тако да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

2. Нека је је $X = \{f_a(x) = x^2 + ax - 2a - 5 \mid a \in \mathbb{R}\}$ (скуп параболо).

(а) Доказати да све параболе из X секу x -осу.

(б) Одредити једначину геометријског места темена свих ових параболола.

(в) За коју вредност параметра a је збир квадрата корена једначине $f_a(x) = 0$ најмањи?

3. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ такве да је број $\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + 10z^2 + 3}$ реалан.

4. Нека су a, b, x и y реални бројеви за које важи $a+b = x+y$ и $a^4+b^4 = x^4+y^4$. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a^n + b^n = x^n + y^n$.

5. Плеће Вгаб има азбуку која садржи само слова А, Б, В и Г. На њиховом језику су смислене све речи које у свом запису немају два иста слова на суседним местима, док остале то нису. Колико има смислених осмословних речи у језику овог племена које свако слово азбуке садрже тачно два пута?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.