

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Први разред, А категорија

1. Нека је X унутрашња тачка троугла ABC , а T његово тежиште. Нека су M, N тачке које припадају страници BC , P, Q тачке које припадају страници CA , R, S тачке које припадају страници AB , тако да важи

$$MQ \parallel AB, \quad PS \parallel BC, \quad RN \parallel CA \quad \text{и} \quad MQ \cap PS \cap RN = \{X\}.$$

Нека су A_1, B_1, C_1 средишта дужи MN, PQ, RS , редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{XT}.$$

2. Од 16 људи, међу којима су по 4 из Србије, Румуније, Бугарске и Македоније, треба изабрати 6.

- (а) Колико има таквих избора у којима је заступљена свака земља?
(б) Колико има таквих избора у којима нема више од два представника неке земље?

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да $121 \nmid n^2 + 3n + 5$.

4. Да ли постоји бијекција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f(x)) - f(x) = 56x + 2008?$$

5. Нека је S средиште дужи AB , а C и D тачке које припадају полукружници над пречником AB , тако да C припада луку AD и да је $\sphericalangle CSD = 90^\circ$. Нека је E пресечна тачка правих AC и BD , а F пресечна тачка правих AD и BC . Доказати да вектор \overrightarrow{EF} не зависи од избора тачака C и D .

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.