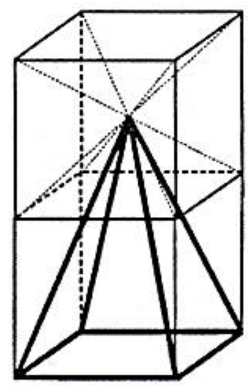
Државно такмичење из математике

осми разред:

2009.

1. Одреди све вредности реалних бројева a, b, c и d за које је:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a\cdot(b+c+d).$$



2. Дате су две исте коцке. Једна је стављена на другу тако да формирају квадар. Направље-на је пирамида чији је врх средиште горње коцке, а основа основа доње коцке (види слику). Одреди који део запремине пирамиде је у горњој коцки у односу на запремину читаве пирамиде.

3. Нека је $x\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Одреди све вредности за x за које важи:

$$\frac{x^{2009}+1}{2}+\frac{2x^{2009}+1}{3}+\ldots+\frac{n\cdot x^{2009}+1}{n+1}=n.$$

4. Страница квадрата је дужине a. Нека је M средиште странице BC, а X подножје нормале из темена A на дуж MD. Изрази обим троугла ABX у зависности од странице a.

5. Докажи да је

$$\frac{1}{2009}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}<\sqrt{\frac{1}{2009}}.$$