ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$10^{-3}x^{\log_{10}x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x\right) = x^2 + 3x.$$

2. Нека су x, y, z реални бројеви, такви да је

$$x \geqslant 4, \quad y \geqslant 5, \quad z \geqslant 6 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 90.$$

Доказати неједнакост $x + y + z \geqslant 16$. Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

3. Нека су m и n различити природни бројеви. Доказати да постоји комплексан број z модула 1 такав да је

$$|1 - z^m + z^n| \geqslant 2.$$

4. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Нека су $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ потпуни системи остатака по модулу n. Доказати да $r_1t_1, r_2t_2, \ldots, r_nt_n$ није потпун систем остатака по модулу n.

5. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви, такви да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Доказати неједнакост

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\right).$$

Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.