ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Други разред, А категорија

1. Доказати да се ниједан прост број облика $p = 2^{2^n} + 1$ не може представити као разлика петих степена два природна броја.

2. Над квадратним триномом $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ дозвољено је вршити следеће операције:

1. међусобно заменити a и c за $c \neq 0$;
2. заменити x са $x + t$, где је t неки реалан број.

Може ли се применом ових операција

(а) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $x^2 - x - 1$?

(б) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $4x^2 + 3x$?

3. Да ли постоји комплексан број z такав да тачке одређене бројевима 1, z^{2007} и z^{2008} чине темена правоуглог троугла?

4. За углове $\triangle ABC$ важи

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 2 : 3.$$

Израчунати обим овог троугла, ако је страница наспрам угла γ једнака $AB = 3$.

5. Нека је M произвољна тачка у $\triangle ABC$, R_1, R_2, R_3 растојања тачке M од тачака A, B, C, редом, а r_1, r_2, r_3 растојања тачке M од страница BC, CA, AB, редом. Доказати да је

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2\left(r_1 + r_2 + r_3\right).$$

Време за рад 180 минута.

Сваки задатак вреди 20 поена.