

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rccccccc} x & + & & y & + & (1-a)z & = & a, \\ (1-a)x & - & & y & + & z & = & -1, \\ x & + & (a-1)y & - & & z & = & 0. \end{array}$$

2. У купу је уписана лопта. Доказати да је однос површина купе и лопте једнак односу њихових запремина.
3. Нека је $x > 0$ реалан број. Одредити поредак бројева (сортирати по величини)

$$x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Нека је $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ таква да:

1. $f(1) = 0$;
2. $f(p) = 1$ за сваки прост број p ;
3. $f(ab) = af(b) + bf(a)$ за све природне a и b .

Одредити све n за које је $f(n) = n$.

5. У сваком пољу табле 12×2008 уписан је по један природан број. Једним потезом је дозвољено удвостручити све бројеве неке врсте или смањити за 1 све бројеве неке колоне. Да ли се увек после неког броја потеза може добити таблица у којој су сви бројеви једнаки 0?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.