

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Четврти разред, А категорија

1. Одредити за које $a, b \in \mathbb{R}$ графици функција

$$f(x) = a \cdot 2^x + b \quad \text{и} \quad g(x) = b \cdot 2^{-x} + a$$

имају тачно две заједничке тачке. Одредити те тачке.

2. Одредити све природне бројеве n за које је $5^n + 12^n$ потпун квадрат.

3. Ако је $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} < n \cdot \sqrt[n]{a_0^2}$, доказати да бар једно решење једначине

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

није реалан број.

4. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, а a , b и c одговарајуће стране. Доказати да је

$$\frac{AH}{a} \cdot \frac{BH}{b} \cdot \frac{CH}{c} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

5. На колико различитих начина се могу поређати шест томова енциклопедије на полицу, тако да 1. том није ни први ни последњи у низу, 2. том се налази поред 3. тома, а 5. и 6. том се не налазе један поред другог?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.