Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2007.

Четврти разред – А категорија

1. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

2. Одредити максималну вредност функције

$$f(x) = \left|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\right|$$

за $x \in [3,4]$.

3. Који правоугли троугао обима $2+\sqrt{2}$ има највећи полупречник уписане кружнице.

4. Нека су A, B, C и D четири произвољне тачке у простору.

a) Доказати да је: $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC}$.

b) Израчунати угао између дијагонала AC и BD (просторног) четвороугла $ABCD$ ако је $AB = 11$, $BC = 13$, $CD = 8$ и $DA = 4$.

Напомена: Дијагонала просторног полигона је свака дуж која спаја нека два несуседна темена.

5. Одредити све полиноме $P \in \mathbb{R}[x]$ за које важи

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \text{ за свако } x \in \mathbb{R}$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.