

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу  $\triangle ABC$  тачка  $D$  је подножје висине из  $C$ , а тачка  $E$  подножје висине из  $D$  у  $\triangle BCD$ . Нека је  $F$  тачка дужи  $DE$  таква да је  $DF : FE = BD : DA$ . Доказати да су праве  $CF$  и  $AE$  узајамно нормалне.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има једначина

$$\left[ \frac{100n}{199} \right] + \left[ \frac{100n}{201} \right] = n?$$

4. Нека су  $a$ ,  $b$  и  $c$  комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  модула 1. Доказати да су сва три корена једначине  $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$ , такође, модула 1.

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након састанка.

а) Да ли је могуће да је комисија која броји 8 чланова одржала укупно 15 састанака (тј. ручкова)?

б) Да ли је могуће да је комисија која броји 13 чланова одржала укупно 7 састанака (тј. ручкова)?

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.