

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Други разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C . Нека су N и M тачке правих AB и BC , редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN . Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.
2. Наћи све бројеве $b \in \mathbb{N}$ за које постоји $a \in \mathbb{N}$ тако да
$$b \mid a^2 + 1 \text{ и } b \mid a^3 - 1.$$
3. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви који задовољавају $x + y + z = 1$. Наћи најмању могућу вредност израза $x + y^2 + z^2$.
4. Решити једначину $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17-x} = 3$.
5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004 . Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.