

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Први разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C . Нека су N и M тачке правих AB и BC , редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN . Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.
2. Природни бројеви a, b и c су такви да су бројеви
$$p = b^c + a, \quad q = a^b + c \text{ и } r = c^a + b$$
прости. Доказати да су два од бројева p, q, r међусобно једнаки.
3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.
4. На колико начина можемо распоредити m различитих птица у n различитих кавеза тако да сваки кавез садржи бар једну, али највише две птице?
5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004 . Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.