

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Трећи разред – А категорија

1. Јединични квадрат је подељен на правоугле троуглове. (Троуглови немају заједничких унутрашњих тачака.) Нека је  $S$  збир хипотенуза свих тих троуглова. Доказати да је  $S \geq 2\sqrt{2}$ . Када важи једнакост?
2. а) Ако је  $x \equiv y \pmod{p}$  онда је и  $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$ . Доказати.  
б) Решити једначину  $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$  у  $\mathbb{N}$ .

3. Једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

има комплексан корен  $a+bi$ , где су  $a, b, p, q \in \mathbb{R}$  и  $q, b \neq 0$ . Показати да је  $aq > 0$ .

4. Доказати да је број

$$n^{2003} + n + 1$$

сложен за сваки природан број  $n$ ,  $n > 1$ .

5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.