

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Други разред – А категорија

1. Базен се пуни двама цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?

2. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2).$$

3. Нека су a и b реални бројеви такви да је $(\forall x \in \mathbb{R}) a \cos x + b \cos 3x \leq 1$. Доказати да је тада $|b| \leq 1$.

4. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C ($\sphericalangle BCS = 90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D . Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC , редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

5. На катетама једнакокрако–правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle BCS = 90^\circ$), изабране су тачке $D \in AC$ и $E \in BC$, такве да је $CD = CE$. Нека су K и L тачке са дужи AB , такве да је $DK \perp AE$ и $CL \perp AE$. Доказати да је $KL = LB$.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.