Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Други разред – А категорија

1. Дати су реални бројеви x и y такви да је $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=\sqrt{2002}$. Колико је $-xy-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$?

2. Дате су квадратне једначине

$$x^2+\frac{8}{a}x-1a=0, \qquad x^2+\frac{6}{a}x-a=0.$$

Одредити све вредности реалног параметра a за које су сва четири корена ових двеју једначина реална и међусобно различита, и при томе се тачно један корен прве једначине налази између корена друге.

3. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је F средиште странице AD, а L тачка на дужи BC таква да је $BL:LC=1:2$. Дијагонала BD сече дужи AL и CF у тачкама P и Q редом. Доказати да су троуглови BLP и DQF слични.

4. Нека су a,b,c дужине страница троугла, α,β,γ одговарајући углови, а S површина троугла ABC. Доказати да важи једнакост:

$$a^2(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)+b^2(\sin 2\alpha+\sin 2\gamma)+c^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=12S.$$

5. Наћи целе бројеве a и b тако да важи

$$\left(1+\frac{1+i}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\cdots\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2002}}\right)=(1+i)\left(a+\frac{b}{2^{2^{2002}}}\right).$$

(i је имагинарна јединица: $i^2=-1$.)

Време за рад 180 минута.