

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је  $A$  коначан подскуп скупа природних броеја који садржи више од седам елемената. Најмањи заједнички садржалац свих бројева из  $A$  је 210. У скупу  $A$  нема парова узајамно простих бројева, а производ свих његових елемената је дељив са 1920 и није квадрат неког природног броја. Одредити скуп  $A$ .
2. Дат је правоугли троугао  $ABC$  ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ) и тачке  $D, E$  на страници  $BC$  такве да је  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$ . Ако је  $BD = 2CE$ , израчунати углове троугла  $ABC$ .
3. На параболи  $y^2 = 2x$  наћи тачку најближу тачки  $(1, 4)$ .
4. Дат је трапез  $ABCD$  са основицама  $AD = a$  и  $BC = b$ ,  $a > b$ . Нека су  $B_1$  и  $C_1$  средишта његових дијагонала. У четвороуглу  $AB_1C_1D$  опет уочимо средишта дијагонала - тачке  $B_2$  и  $C_2$ . Овај поступак настављамо, и у  $n$ -том кораку означимо са  $B_n$  и  $C_n$  средишта дијагонала четвороугла  $AB_{n-1}C_{n-1}D$ .
  - а) Наћи дужину дужи  $B_nC_n$ .
  - б) Израчунати  $\lim_{n \rightarrow \infty} |B_nC_n|$ .
  - в) Какав треба да буде трапез  $ABCD$  да би све дужи  $B_nC_n$  биле међусобно једнаке?
5. Доказати да не постоје природни бројеви  $a, b, c, d$  такви да је

$$a^a + b^b + c^c = d^d.$$

Време за рад 180 минута.