

Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Други разред – Б категорија

1. Права p је спољна заједничка тангента кругова k_1 и k_2 који се споља додирују. Круг k споља додирује оба та круга и праву p . Ако су r_1 , r_2 и r полупречници кругова k_1 , k_2 и k редом, доказати једнакост

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

2. Решити неједначину

$$\frac{x^2 + x + 2 - |3x + 1|}{x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1} > 0.$$

3. Странице правоугаоника $ABCD$ су $AB = 12$ и $BC = 10$. Тачка A спојена је са средиштем E странице BC и из тачке D повучена је нормала DM на дуж AE (M је подножје нормале). Израчунати дужину дужи DM .
4. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, где је $p \neq 0$ реалан број, доказати да важи $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.
5. Нека је z комплексан број различит од 1 и -1 . Доказати да је број $\frac{z-1}{z+1}$ чисто имагинаран ако и само ако је $|z| = 1$.

Време за рад 180 минута.