

Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Трећи разред – А категорија

1. За какве реалне бројеве p систем једначина

$$\begin{aligned}2x - \log_2(1 + y^2) &= p \\ -x + \cos y &= 19 - p^2\end{aligned}$$

има тачно једно решење?

2. Нека је $z_k = \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p}$ за $k = 0, 1, \dots, p-1$, где је p прост број. За ма који природан број n , израчунати $z_0^n + z_1^n + \dots + z_{p-1}^n$.
3. Дата је основа куће која се састоји од квадрата странице 8 и квадрата странице 4, тако да кућа има шест спољних зидова дужина 12, 8, 8, 4, 4 и 4. Од нивоа олука, кров се над сваким зидом уздиже под једнаким углом 45° . Гледано са било које тачке крова, кров се спушта према најближем зиду; кров се дели у тачкама подједнако удаљеним од више зидова. Нацртати површ крова, а затим израчунати запремину испод крова.
4. Дата су два круга k_1 и k_2 који се додирују споља у тачки A . Нека су B и C променљиве тачке на k_1 и k_2 такве да је $\sphericalangle BAC = \pi/2$ и нека је D подножје нормале из A на BC . Наћи геометријско место тачака D .
5. Израчунати вредност детерминанте реда n :

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y \\ y & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Време за рад 180 минута.